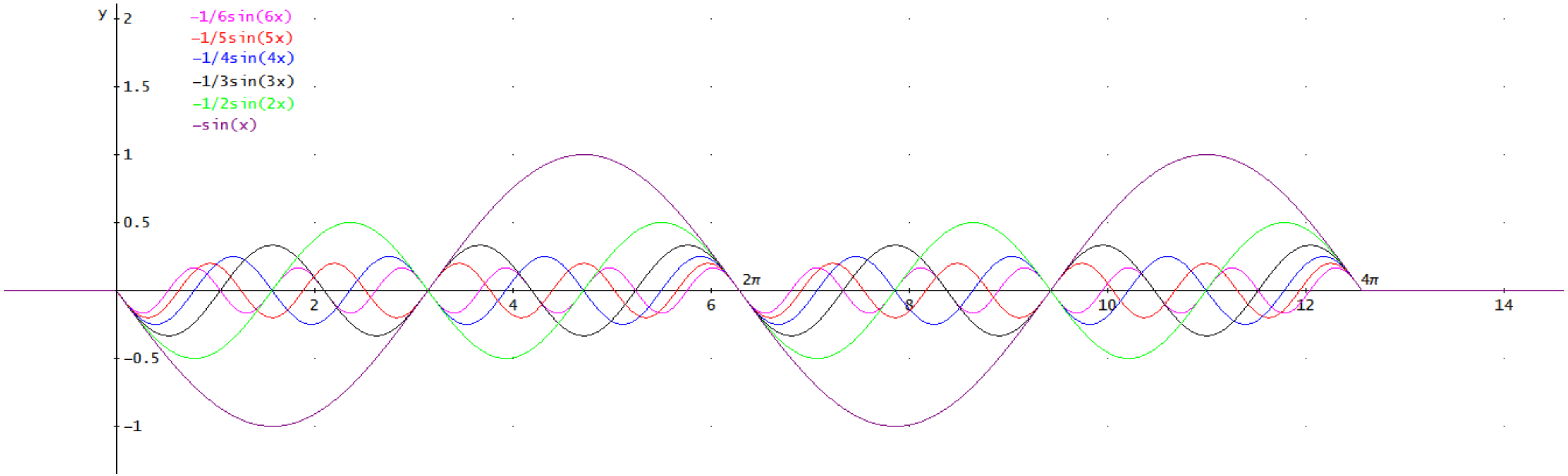
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Prof. Attampato Daniele



SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

Uno dei problemi più frequenti in matematica è legato alla necessità di approssimare una funzione. Uno degli strumenti più utilizzati a tal proposito è proprio lo **sviluppo in serie di una funzione**.

INTRODUZIONE

Intorno al 1800 il matematico **Joseph Fourier**, studiando a lungo la propagazione del calore, intuì che qualsiasi funzione f(x) può essere sviluppata mediante una combinazione lineare di funzioni goniometriche del tipo:

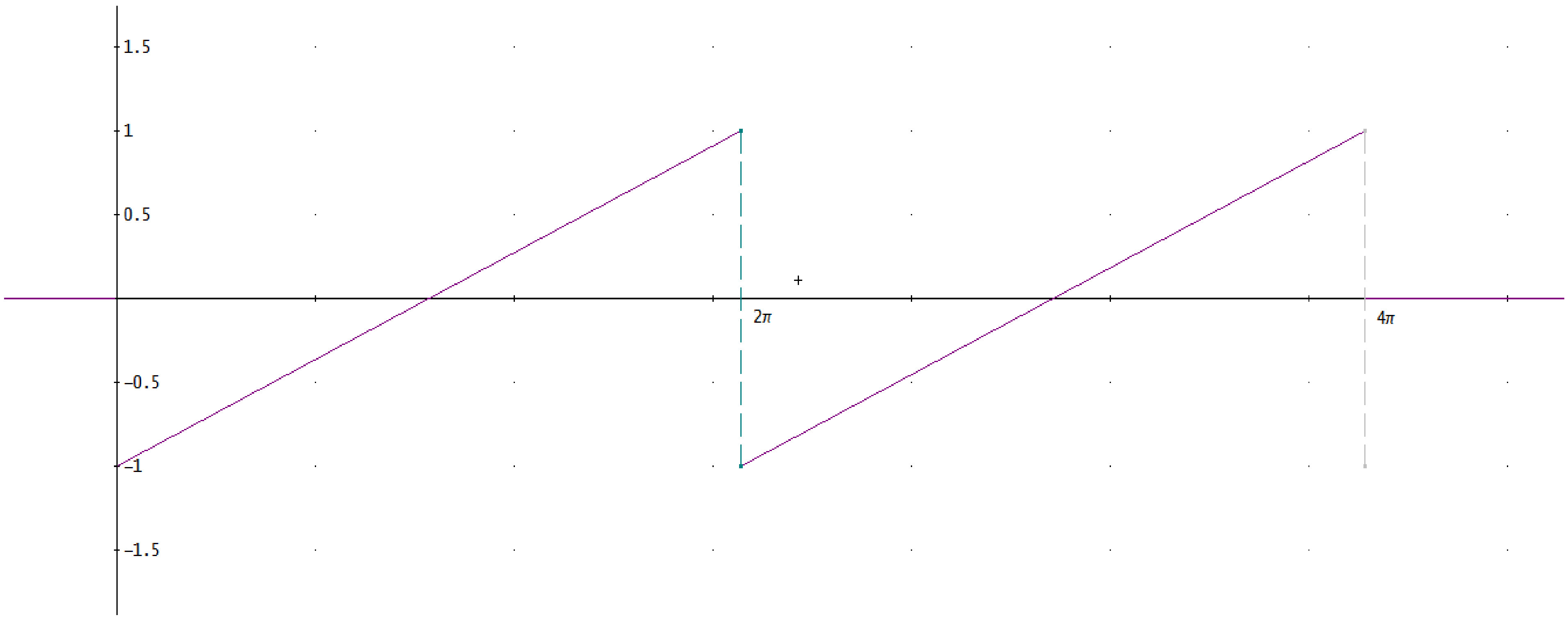
$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 cosx + a_2 cos2x + \cdots a_n cosnx + \cdots b_1 sinx + b_2 sin2x + \cdots b_n sinnx + \cdots$$

Dove a_i e b_i sono opportuni coefficienti che saranno determinati più avanti. Il suo lavoro venne poi formalizzato in maniera più rigorosa dal matematico **Ljeune Dirichelet** che esaminò scrupolosamente le **funzioni periodiche**, osservando che molti fenomeni fisici sono di tipo "periodico": le pulsazioni cardiache, gli impulsi elettrici, la trasmissione delle onde, le oscillazioni di un pendolo, etc.

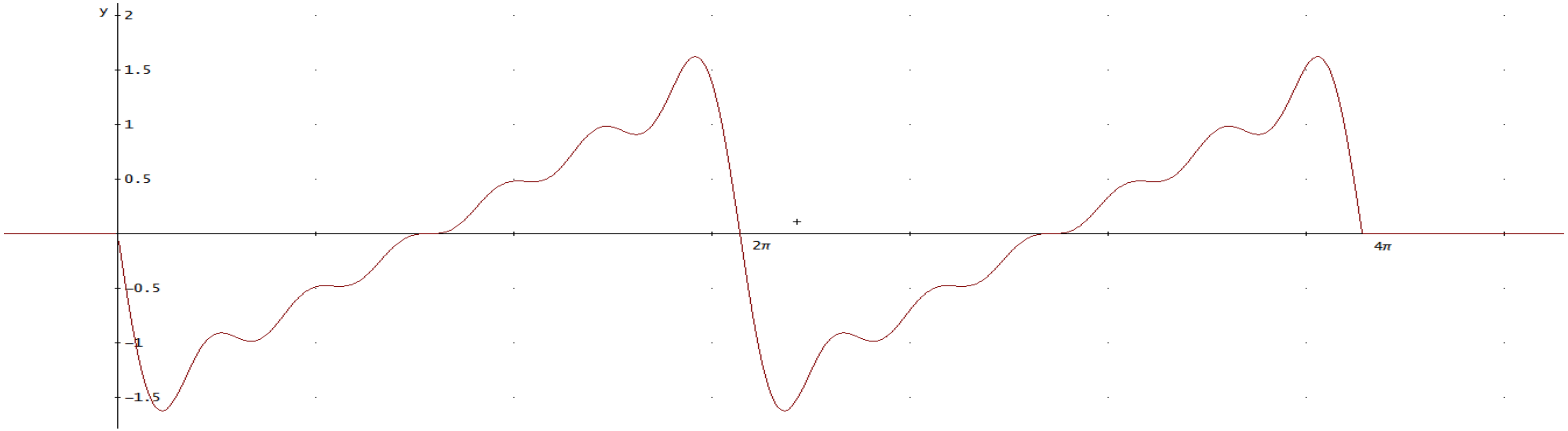
In particolare, per molti tipi di onde vale oltretutto il cosiddetto principio di sovrapposizione per cui se in un determinato punto dello spazio transitano due o più onde, lo spostamento di una particella che si trova in quel punto è dato semplicemente dalla somma degli spostamenti che le onde, singolarmente, le conferiscono agendo da sole.

***In tal modo è possibile analizzare un fenomeno ondulatorio, anche molto complesso, attraverso una combinazione di moti ondulatori più semplici*.**

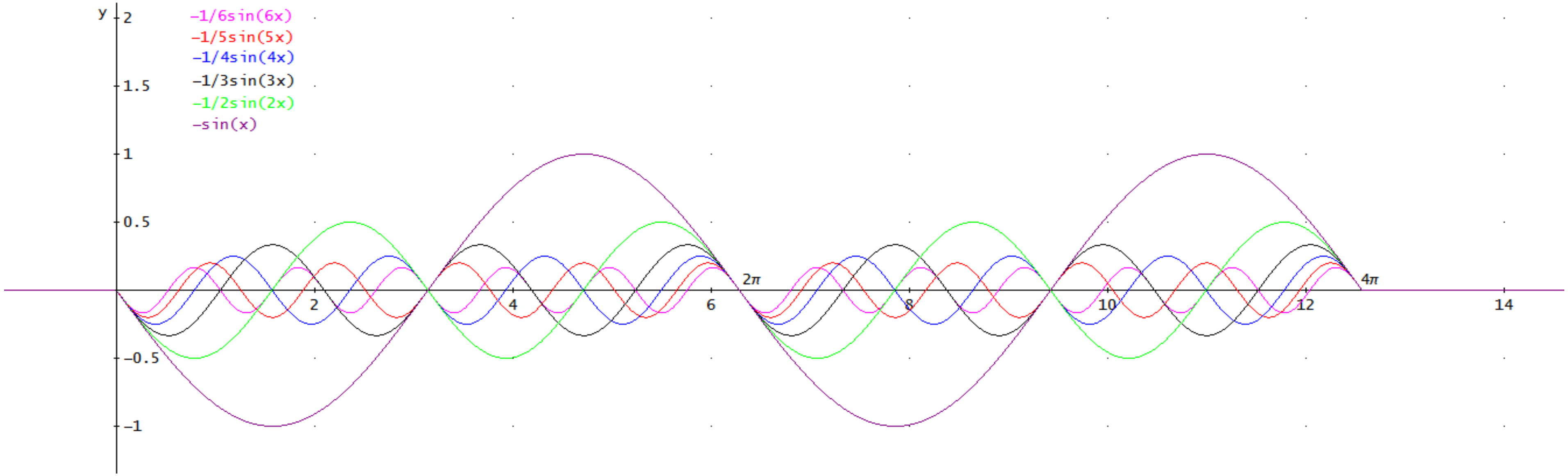
Esempio: l'**onda a dente di sega** (molto utilizzata in ambito elettronico e non solo…)



può essere approssimata da una curva del genere:



ottenuta mediante la somma di sei semplici funzioni goniometriche:



LE FUNZIONI PERIODICHE

Una funzione, definita in un certo dominio D, si dice periodica se per ogni $x \in D$ si ha che:

$$f(x+T)=f(x)$$

in cui **T** rappresenta il periodo della funzione. ***L'importanza delle funzioni periodiche sta nel fatto che, noto il loro comportamento in T, è noto il loro comportamento in tutto il dominio***.

Esempi di funzioni periodiche:

y=sinx e y=cosx sono funzioni periodiche di periodo $T=2\pi$
y=sin 2x e y=cos 2x sono funzioni periodiche di periodo $T=2\pi/2=\pi$
y=sin 3x e y=cos 3x sono funzioni periodiche di periodo $T=2\pi/3$
……..
y=sin nx e y=cos nx sono funzioni periodiche di periodo $T=2\pi/n$

E' evidente che funzioni periodiche di periodo T, sono periodiche anche di periodo nT ($n \in Z$). Di conseguenza:

y=sin nx e y=cos nx sono funzioni periodiche di periodo $T=2\pi/n$
sono funzioni periodiche di periodo $T=(2\pi/n)*n=2\pi$

Il più piccolo valore T per cui la funzione si ripete si dice **periodo principale** o **periodo minimo**.

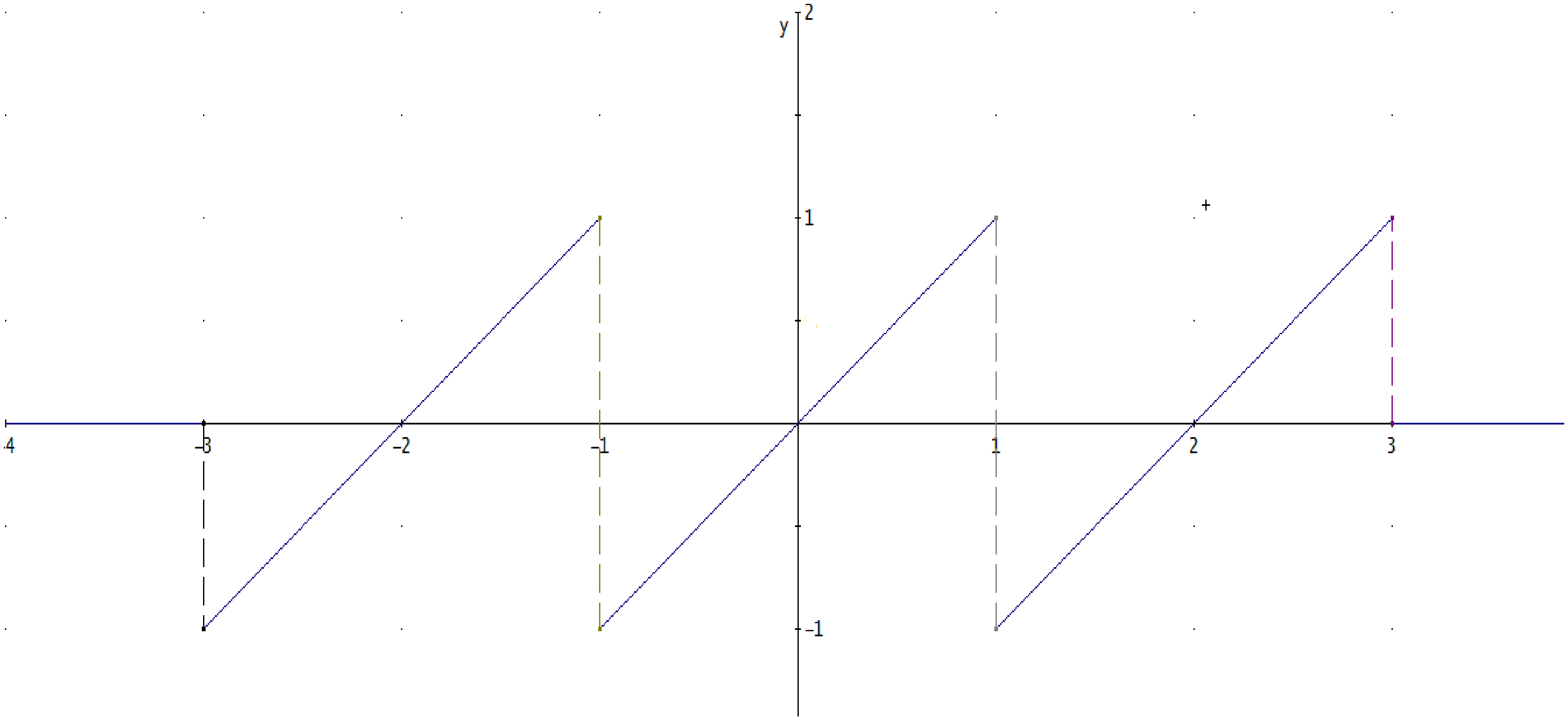
<u>Prima osservazione:</u> abbiamo visto che funzioni periodiche come ad esempio $y=\sin nx$ e $y=\cos nx$ sono periodiche di **periodo minimo** $T=2\pi/n$, ma lo sono anche di periodo $T=2\pi$. Ne consegue che una combinazione lineare di queste funzioni, ad esempio: $f(x) = \cos 2x + 5 \sin 2x - \sin 5x +9 \cos 6x$

è periodica di periodo 2π.

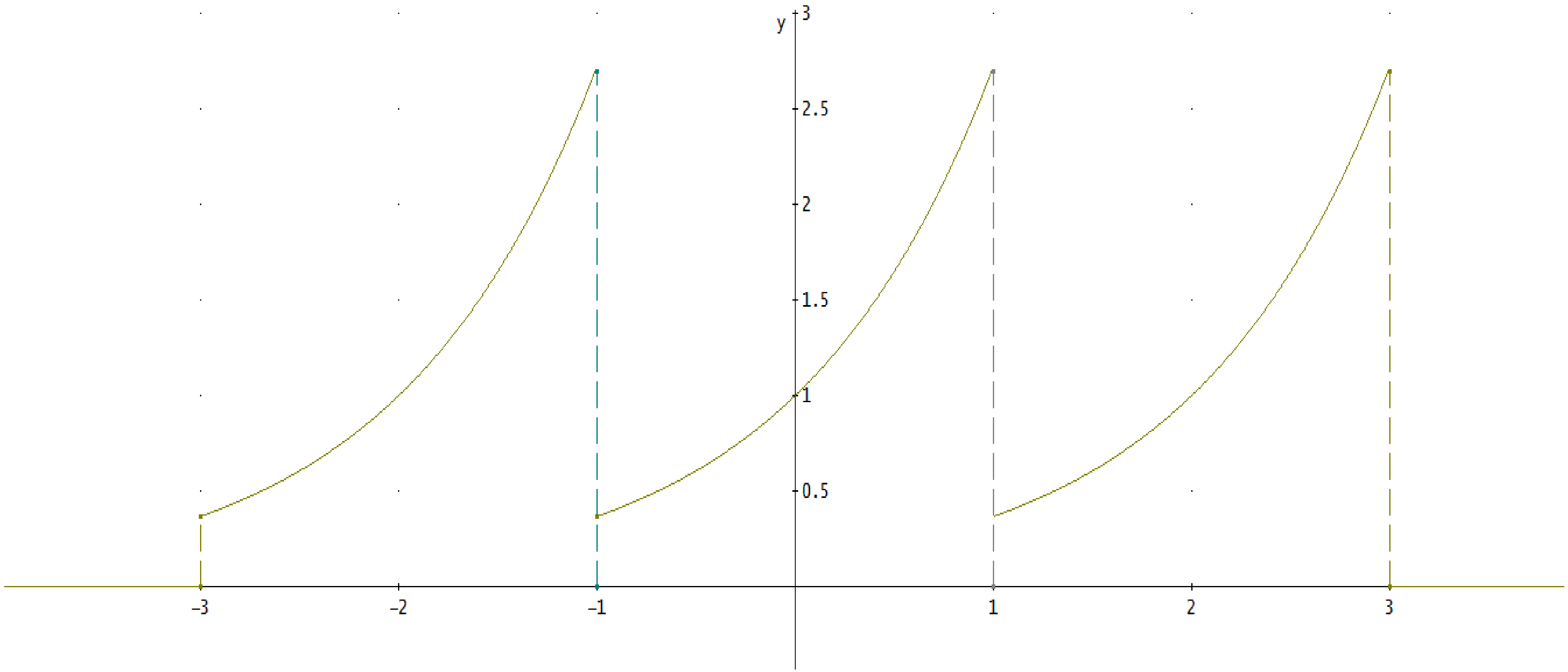
Ne consegue che ha una certa logica il tentare di approssimare una qualunque funzione di periodo 2π, mediante una combinazione lineare di funzioni goniometriche (come visto nell'esempio relativo all'onda a dente di sega).

<u>Seconda osservazione:</u> Anche funzioni **f** non considerate generalmente periodiche possono diventarlo se vengono definite in un certo intervallo [a,b) e poi pensate prolungate in ogni intervallo di ampiezza b-a, successivo o precedente. La funzione **f*** generata in questo modo si dice che è il **prolungamento periodico** della funzione **f** in [a,b).

Esempio 1: la funzione **f(x)=x**, definita nell'intervallo [-1,1), può essere prolungata periodicamente in questo modo: **f*(x)=x-2k** definita negli intervalli [-1+2k,1+2k)



Esempio 2: la funzione **$f(x)=e^x$**, definita nell'intervallo [-1,1), può essere prolungata periodicamente in questo modo: **$f^*(x)=e^{x-2k}$** definita negli intervalli [-1+2k,1+2k)



LA SERIE DI FOURIER

Data una funzione f(x) <u>periodica di periodo 2∏</u>, <u>integrabile nell'intervallo [-∏,∏]</u>, si dice **serie di Fourier** ad essa associata, la serie:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Tale serie è una ***serie trigonometrica*** e i *coefficienti*, detti **coefficienti di *Eulero-Fourier***, sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx & \left(a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \right) \\ & n \in N \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx \end{cases}$$

NB 1: è molto complesso valutare le condizioni per cui una f(x) <u>qualunque</u> è sviluppabile in serie di Fourier, per cui ci limiteremo a tralasciare tale aspetto e per ora **supporremo di avere a che fare con funzioni periodiche di periodo T=2π**.

NB 2: una funzione è integrabile in un intervallo se nell'intervallo in questione essa è *continua, o al più se ammette un numero finito di discontinuità eliminabili o di prima specie*. Ciò vuol dire che negli eventuali punti di discontinuità devono esistere comunque finiti i limiti destro e sinistro. Una funzione che soddisfa tali condizioni si dice **continua a tratti**. Dunque, **è sempre possibile costruire la serie di Fourier delle funzioni periodiche continue a tratti**.

Domanda: Esiste una condizione generale di convergenza dello sviluppo in serie di Fourier? Ad oggi non esiste una condizione necessaria e sufficiente di convergenza. E' stata formulata però una **condizione sufficiente di convergenza**, che stabilisce *in quali casi la serie di Fourier associata ad una funzione converge alla funzione stessa*.

Tale condizione viene enunciata nel **teorema di Dirichelet**.

Teorema di Dirichelet

Sia f(x) una funzione periodica di periodo 2∏; se accade che:

- f(x) è <u>continua a tratti</u> nell'intervallo [-∏,∏]
- l'intervallo [-∏,∏] può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali f(x) è <u>monotona</u>

allora la serie di Fourier associata a f(x) converge per ogni x.

In particolare, la somma della serie è:

- **la funzione f(x)**, in tutti i punti dell'intervallo (-∏,∏) che sono di continuità per f(x)
- **la media aritmetica dei limiti destro e sinistro di f(x)**, nei punti di discontinuità interni all'intervallo [-∏,∏]
- **il valore** $\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to -\prod^+} f(x) + \lim_{x \to \prod^-} f(x)\right]$, negli estremi -∏ e ∏

Conclusione: se una funzione è <u>continua a tratti</u> (ove è definita) e <u>limitata</u>, allora è sviluppabile in serie di Fourier e tale serie converge in tutto R!

LA SERIE DI FOURIER

DI FUNZIONI PARI E DISPARI

Se f(x) è pari, il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione seno ed è una funzione di soli coseni:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

Dato che il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari, posso semplificare a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\pi} f(x) dx \right)$$

Dato che il prodotto di una funzioni pari e una funzione dispari è una funzione dispari:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

Se f(x) è <u>dispari</u>, il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione coseno ed è una funzione di soli seni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

Dato che il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari, posso semplificare b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Dato che il prodotto di una funzioni dispari e una funzione pari è una funzione dispari:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = 0\right)$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

DELLE FUNZIONI PERIODICHE DI T=2h

Tutto quello che è stato detto per le funzioni periodiche di periodo 2Π, può essere estesso alle funzioni periodiche di **periodo 2h**, definite in intervalli della forma **[-h,h]**. Questo vuol dire che è possibile sviluppare in serie di Fourier qualsiasi funzione continua e monotona a tratti, definita in un intervallo [-h,h] e prolungata per periodicità.

Basta, difatti, effettuare un cambio di variabile: $x = \frac{h}{\pi} t \Longrightarrow t = \frac{\pi x}{h}$

Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica di periodo T=2h è dunque:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n cos\, \frac{\pi n x}{h} + b_n sin\, \frac{\pi n x}{h}\right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\mathrm{h}} \int_{-\mathrm{h}}^{h} f(x) \cos \frac{\pi \mathrm{nx}}{\mathrm{h}}\, dx \\ b_n = \frac{1}{\mathrm{h}} \int_{-\mathrm{h}}^{h} f(x) \sin \frac{\pi \mathrm{nx}}{\mathrm{h}}\, dx \end{cases}$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{\mathrm{h}} \int_{-h}^{h} f(x) dx \right)$$

- **Se f(x) è pari** il suo sviluppo è una combinazione di soli coseni ($b_n=0$):

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{h}}$$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{h}} \int_0^h f(x) \cos \frac{\pi \mathrm{nx}}{\mathrm{h}}\, dx \qquad \left(a_0 = \frac{2}{\mathrm{h}} \int_0^h f(x) dx \right)$$

- **Se f(x) è dispari** il suo sviluppo è una combinazione di soli seni ($a_n=0$):

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{h}}$$

$$b_n = \frac{2}{\mathrm{h}} \int_0^h f(x) \sin \frac{\pi \mathrm{nx}}{\mathrm{h}}\, dx$$